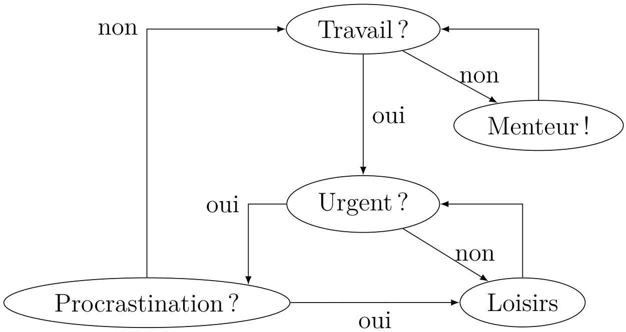
Langages et Automates
Automates (et langages ?)

Engel Lefaucheux

Prépas des INP

L'automate: une machine abstraite

- Inspiré des diagrammes de flux
- Accepte ou rejette des mots
- Utile pour représenter un grand nombre de systèmes



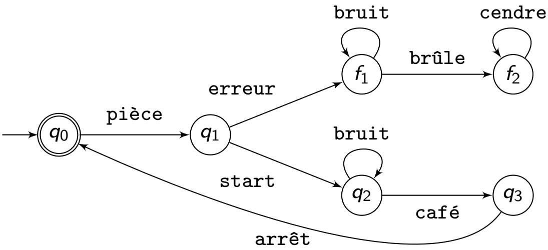
Objectif de ce cours

- Découvrir la notion d'automate
- Apprendre et manipuler les types d'automates
  - Complet (ou non ?)
  - Déterministe (ou non ?)
  - Avec ε-transition (ou non ?)
- Opérations usuelles sur les automates
  - Complémentation
  - Union
  - Concaténation
  - Déterminisation

Plan

Outline

Représentation graphique



Représentation graphique d'un automate

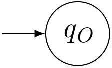
- états : représentent l'état actuel du système / où en est l'analyse de l'entrée
- transition : action ou évolution du système / lecture du symbole suivant
- état initial / final : où démarrent et s'arrète la lecture

Zoom sur les états

⇒ Indique où en est l'analyse d'un mot

- États : **nœuds**
  - **Cercle**
  - **Label** : q_i avec i un entier

- État **initial**
  - Ajout d'une **flèche** devant
  - Souvent q_0 (mais pas obligatoire)

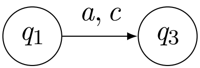


- État **final**
  - **Double** cercle

Zoom sur les transitions

$\Rightarrow$ Indique quelles prochains symboles sont acceptés

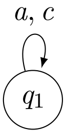
- Transitions : **arcs**
  - **Arc orienté** (flèche) qui relie deux états
  - **Label** : liste (ensemble) de symboles de Σ



$\Rightarrow$ Reconnaît le langage $\{a, c\}$ ou $\{a\} \cup \{c\}$ (mais pas $\{a.c\}$!)

$\Rightarrow$ Si, en q_1, le prochain symbole est a ou c, aller en q_3

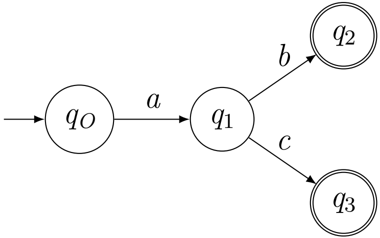
- Transition d'un état vers lui-même



  - **Boucle** au dessus d'un état

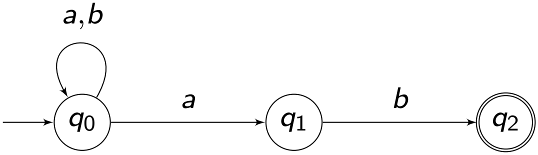
Reconnaissance d'un mot

- Chemin suivi au travers d'un automate
  - L'automate **consomme** les symboles
  - Une liste d'état « visités » est établie
  - Arrivée en fin de mot dans l'état final
- Exemple : mots ab ou ac



- Langage d'un automate l'ensemble des mots accepté
  - Langage reconnu par un automate = "langage reconnaissable"

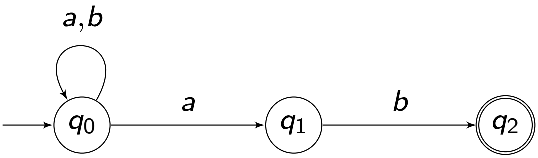
Possible non-déterminisme



Depuis q_0 en lisant a, on peut aller soit dans q_0 soit dans q_1

Un mot est accepté s'il existe un chemin acceptant

Possible non-déterminisme



Depuis q_0 en lisant a, on peut aller soit dans q_0 soit dans q_1

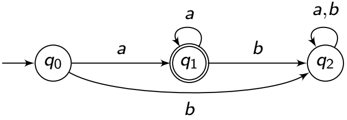
Un mot est accepté s'il existe un chemin acceptant

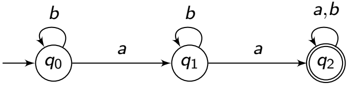
Le mot *aaab* est-il accepté ?

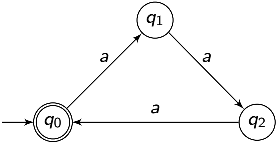
Quel est le langage reconnu par cet automate ?

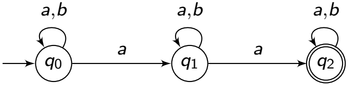
Exercices

Quels sont les langages reconnus par les automates suivants :







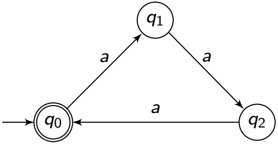


Construire l'automate reconnaissant les mots qui contiennent le facteur *abba*.

Définition formelle

Un automate est un quintuplet $\mathcal{A} = \{Q, \Sigma, T, I, F\}$

- États :$Q = \{q_0, q_1, q_2, \dots\}$
- Alphabet : $\Sigma = \{a, b, c, \dots\}$
- Transitions : $T \subseteq Q \times \Sigma \times Q$
- États initiaux $I \subseteq Q$
- États finaux $F \subseteq Q$



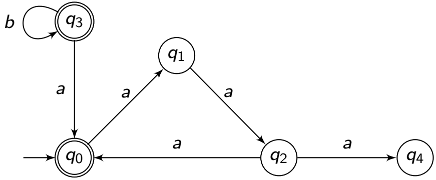
$Q = \{q_0, q_1, q_2\}, \Sigma = \{a\}, I = \{q_0\}, F = \{q_0\}$ et
$T = \{(q_0, a, q_1), (q_1, a, q_2), (q_2, a, q_0)\}$.

Outline

(co)-Accessibilité et émondage

- Un état est accessible s'il existe un chemin depuis un état initial vers cet état.
- Un état est co-accessible s'il existe un chemin depuis cet état vers un état final.
- Un automate est émondé si tous les états sont accessibles et co-accessibles

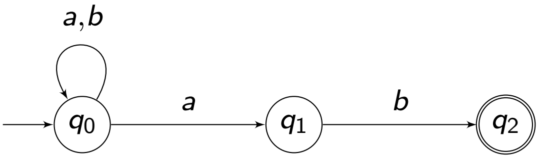
Émonder l'automate suivant :



Automate complet

- Un automate est complet si pour tout $a \in \Sigma$, tout $q \in Q$ il existe $q' \in Q$ tel que $(q, a, q') \in T$.

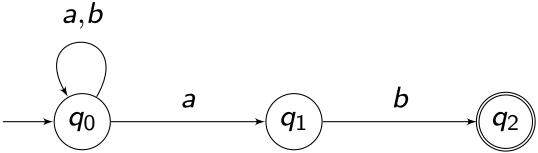
L'automate suivant est-il complet ? Peut-on le transformer pour le compléter ?



Automate complet

- Un automate est complet si pour tout $a \in \Sigma$, tout $q \in Q$ il existe $q' \in Q$ tel que $(q, a, q') \in T$.

L'automate suivant est-il complet ? Peut-on le transformer pour le compléter ?

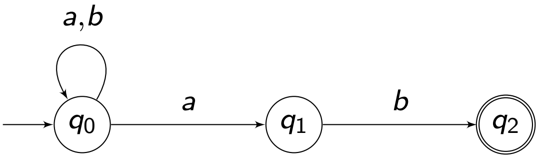


Est-ce que tous les automates sont complétables ?

Automate déterministe

- Un automate est déterministe si pour tout $a \in \Sigma$, tout $q \in Q$ il existe au plus un état $q' \in Q$ tel que $(q, a, q') \in T$.

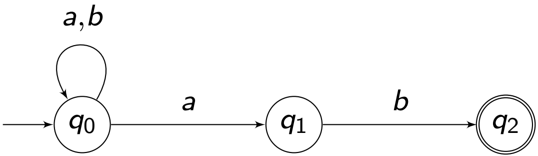
L'automate suivant est-il déterministe ? Peut-on le transformer pour le déterminiser ?



Automate déterministe

- Un automate est déterministe si pour tout $a \in \Sigma$, tout $q \in Q$ il existe au plus un état $q' \in Q$ tel que $(q, a, q') \in T$.

L'automate suivant est-il déterministe ? Peut-on le transformer pour le déterminiser ?

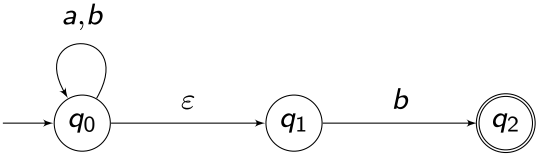


Est-ce que tous les automates sont déterminisables ?

Automate sans ε-transition

En théorie, on peut étiquetter des transitions par ε

Quel langage est reconnu par l'automate suivant ?



Peut-on retirer l'ε ?

Si un automate a des ε-transitions, on le considère non-déterministe.

Outline

Opérations sur les automates

Quels langages peut-on créer à partir d'automates existants ?

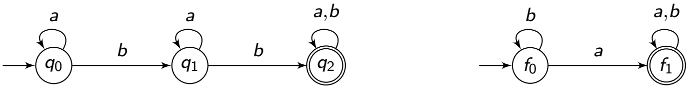
Soit L_1, L_2 deux langages reconnaissables par des automates déterministes. Les langages suivants sont-ils reconnaissables ?

- $L_1 \cup L_2$?
- $\overline{L_1}$?
- $L_1 \cdot L_2$?
- $(L_1)^*$?
- $mirroir(L_1)$?
- $L_1 \cap L_2$?

$L_1 \cup L_2$

$\mathcal{A}_1 = (Q_1, \Sigma, T_1, I_1, F_1)$ and $\mathcal{A}_2 = (Q_2, \Sigma, T_2, I_2, F_2)$
On construit $\mathcal{A}_3 = (Q_3, \Sigma, T_3, I_3, F_3)$

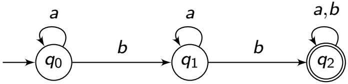
- $Q_3 = Q_1 \cup Q_2$, $I_3 = I_1 \cup I_2$ et $F_3 = F_1 \cup F_2$
- $(q, a, q') \in T_3$ si et seulement si $(q, a, q') \in T_1$ ou $(q, a, q') \in T_2$

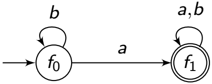


$L_1 \cup L_2$ alternatif

$\mathcal{A}_1 = (Q_1, \Sigma, T_1, I_1, F_1)$ and $\mathcal{A}_2 = (Q_2, \Sigma, T_2, I_2, F_2)$
On construit $\mathcal{A}_3 = (Q_3, \Sigma, T_3, I_3, F_3)$

- $Q_3 = Q_1 \cup Q_2 \cup \{start\}$, $I_3 = \{start\}$ et $F_3 = F_1 \cup F_2$
- $(start, \varepsilon, q') \in T_3$ si $q' \in I_1 \cup I_2$ ou, pour $q \neq start$ $(q, a, q') \in T_3$ si et seulement si $(q, a, q') \in T_1$ ou $(q, a, q') \in T_2$

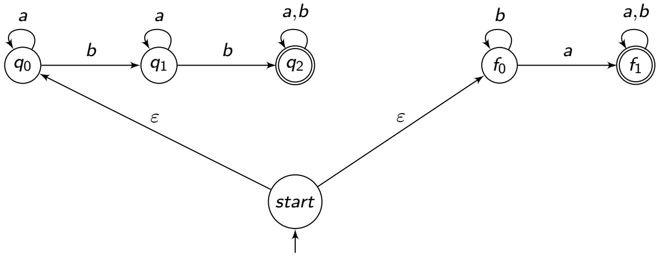




$L_1 \cup L_2$ alternatif

$\mathcal{A}_1 = (Q_1, \Sigma, T_1, I_1, F_1)$ and $\mathcal{A}_2 = (Q_2, \Sigma, T_2, I_2, F_2)$
On construit $\mathcal{A}_3 = (Q_3, \Sigma, T_3, I_3, F_3)$

- $Q_3 = Q_1 \cup Q_2 \cup \{start\}$, $I_3 = \{start\}$ et $F_3 = F_1 \cup F_2$
- $(start, \varepsilon, q') \in T_3$ si $q' \in I_1 \cup I_2$ ou, pour $q \neq start$ $(q, a, q') \in T_3$ si et seulement si $(q, a, q') \in T_1$ ou $(q, a, q') \in T_2$



Opérations sur les automates

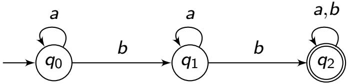
Quels langages peut-on créer à partir d'automates existants ?

Soit L_1, L_2 deux langages reconnaissables par des automates déterministes. Les langages suivants sont-ils reconnaissables ?

- $L_1 \cup L_2$? $\checkmark$
- $\overline{L_1}$?
- $L_1 \cdot L_2$?
- $(L_1)^*$?
- $mirroir(L_1)$?
- $L_1 \cap L_2$?

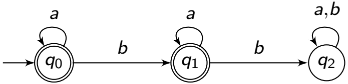
$\overline{L_1}$

$\mathcal{A}_1 = (Q_1, \Sigma, T_1, I_1, F_1)$
On construit $\mathcal{A}_3 = (Q_1, \Sigma, T_1, I_1, Q_1 \setminus F_3)$
$\mathcal{A}_1$ doit être complet et déterministe !



$\overline{L_1}$

$\mathcal{A}_1 = (Q_1, \Sigma, T_1, I_1, F_1)$
On construit $\mathcal{A}_3 = (Q_1, \Sigma, T_1, I_1, Q_1 \setminus F_3)$
$\mathcal{A}_1$ doit être complet et déterministe !



Opérations sur les automates

Quels langages peut-on créer à partir d'automates existants ?

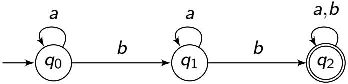
Soit L_1, L_2 deux langages reconnaissables par des automates déterministes. Les langages suivants sont-ils reconnaissables ?

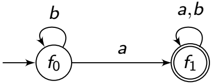
- $L_1 \cup L_2$? $\checkmark$
- $\overline{L_1}$? $\checkmark$
- $L_1 \cdot L_2$?
- $(L_1)^*$?
- $mirroir(L_1)$?
- $L_1 \cap L_2$?

$L_1 \cdot L_2$

$\mathcal{A}_1 = (Q_1, \Sigma, T_1, I_1, F_1)$ and $\mathcal{A}_2 = (Q_2, \Sigma, T_2, I_2, F_2)$
On construit $\mathcal{A}_3 = (Q_3, \Sigma, T_3, I_3, F_3)$

- $Q_3 = Q_1 \cup Q_2$, $I_3 = I_1$ et $F_3 = F_2$
- $(q, a, q') \in T_3$ si et seulement si soit $(q, a, q') \in T_1$, $(q, a, q') \in T_2$, ou $q \in F_1, q' \in I_2$ et $a = \varepsilon$.

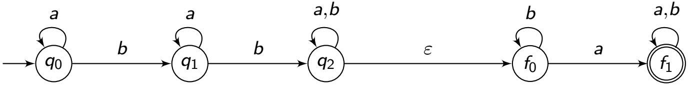




$L_1 \cdot L_2$

$\mathcal{A}_1 = (Q_1, \Sigma, T_1, I_1, F_1)$ and $\mathcal{A}_2 = (Q_2, \Sigma, T_2, I_2, F_2)$
On construit $\mathcal{A}_3 = (Q_3, \Sigma, T_3, I_3, F_3)$

- $Q_3 = Q_1 \cup Q_2$, $I_3 = I_1$ et $F_3 = F_2$
- $(q, a, q') \in T_3$ si et seulement si soit $(q, a, q') \in T_1$, $(q, a, q') \in T_2$, ou $q \in F_1, q' \in I_2$ et $a = \varepsilon$.



Opérations sur les automates

Quels langages peut-on créer à partir d'automates existants ?

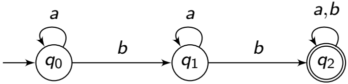
Soit L_1, L_2 deux langages reconnaissables par des automates déterministes. Les langages suivants sont-ils reconnaissables ?

- $L_1 \cup L_2$? $\checkmark$
- $\overline{L_1}$? $\checkmark$
- $L_1 \cdot L_2$? $\checkmark$
- $(L_1)^*$?
- $mirroir(L_1)$?
- $L_1 \cap L_2$?

$(L_1)^*$

$\mathcal{A}_1 = (Q_1, \Sigma, T_1, I_1, F_1)$
On construit $\mathcal{A}_3 = (Q_3, \Sigma, T_3, I_3, F_3)$

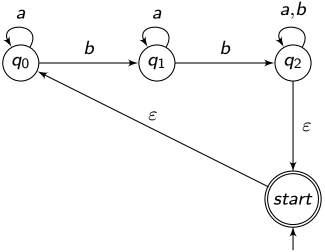
- $Q_3 = Q_1 \cup \{start\}$, $I_3 = \{start\}$ et $F_3 = \{start\}$
- $(q, a, q') \in T_3$ si et seulement si soit $(q, a, q') \in T_1$, $q = start, q' \in I_1$ et $a = \varepsilon$ ou $q \in F_1, q' = start$ et $a = \varepsilon$.



$(L_1)^*$

$\mathcal{A}_1 = (Q_1, \Sigma, T_1, I_1, F_1)$
On construit $\mathcal{A}_3 = (Q_3, \Sigma, T_3, I_3, F_3)$

- $Q_3 = Q_1 \cup \{start\}$, $I_3 = \{start\}$ et $F_3 = \{start\}$
- $(q, a, q') \in T_3$ si et seulement si soit $(q, a, q') \in T_1$, $q = start, q' \in I_1$ et $a = \varepsilon$ ou $q \in F_1, q' = start$ et $a = \varepsilon$.



Opérations sur les automates

Quels langages peut-on créer à partir d'automates existants ?

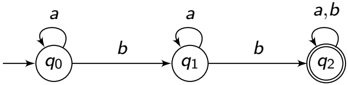
Soit L_1, L_2 deux langages reconnaissables par des automates déterministes. Les langages suivants sont-ils reconnaissables ?

- $L_1 \cup L_2$? $\checkmark$
- $\overline{L_1}$? $\checkmark$
- $L_1 \cdot L_2$? $\checkmark$
- $(L_1)^*$? $\checkmark$
- $mirroir(L_1)$?
- $L_1 \cap L_2$?

$mirroir(L_1)$

$\mathcal{A}_1 = (Q_1, \Sigma, T_1, I_1, F_1)$
On construit $\mathcal{A}_3 = (Q_3, \Sigma, T_3, I_3, F_3)$

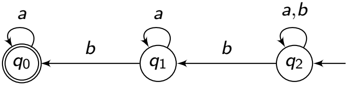
- $Q_3 = Q_1$, $I_3 = F_1$ et $F_3 = I_1$
- $(q, a, q') \in T_3$ si et seulement si $(q', a, q) \in T_1$.



$mirroir(L_1)$

$\mathcal{A}_1 = (Q_1, \Sigma, T_1, I_1, F_1)$
On construit $\mathcal{A}_3 = (Q_3, \Sigma, T_3, I_3, F_3)$

- $Q_3 = Q_1$, $I_3 = F_1$ et $F_3 = I_1$
- $(q, a, q') \in T_3$ si et seulement si $(q', a, q) \in T_1$.



Exercice

Construire un automate reconnaissant les langages

- $L_1 = (\overline{abba})^*$,
- $L_2 = mirroir((abb)^*)$
- $L_3 = L_1 \cup L_2 \cdot L_1$

Opérations sur les automates

Quels langages peut-on créer à partir d'automates existants ?

Soit L_1, L_2 deux langages reconnaissables par des automates déterministes. Les langages suivants sont-ils reconnaissables ?

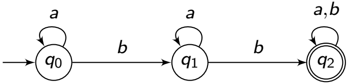
- $L_1 \cup L_2$? $\checkmark$
- $\overline{L_1}$? $\checkmark$
- $L_1 \cdot L_2$? $\checkmark$
- $(L_1)^*$? $\checkmark$
- $mirroir(L_1)$? $\checkmark$
- $L_1 \cap L_2$?

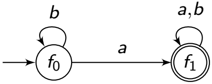
$L_1 \cap L_2$

$\mathcal{A}_1 = (Q_1, \Sigma, T_1, I_1, F_1)$ and $\mathcal{A}_2 = (Q_2, \Sigma, T_2, I_2, F_2)$
On construit $\mathcal{A}_3 = (Q_3, \Sigma, T_3, I_3, F_3)$

- $Q_3 = Q_1 \times Q_2$, $I_3 = I_1 \times I_2$ et $F_3 = F_1 \times F_2$
- $((q_1, q_2), a, (q_1', q_2')) \in T_3$ si et seulement si $(q_1, a, q_1') \in T_1$ et $(q_2, a, q_2') \in T_2$

$\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ doivent être sans ε-transitions.



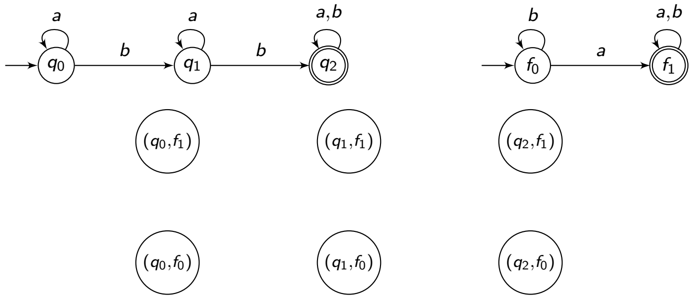


$L_1 \cap L_2$

$\mathcal{A}_1 = (Q_1, \Sigma, T_1, I_1, F_1)$ and $\mathcal{A}_2 = (Q_2, \Sigma, T_2, I_2, F_2)$
On construit $\mathcal{A}_3 = (Q_3, \Sigma, T_3, I_3, F_3)$

- $Q_3 = Q_1 \times Q_2$, $I_3 = I_1 \times I_2$ et $F_3 = F_1 \times F_2$
- $((q_1, q_2), a, (q_1', q_2')) \in T_3$ si et seulement si $(q_1, a, q_1') \in T_1$ et $(q_2, a, q_2') \in T_2$

$\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ doivent être sans ε-transitions.

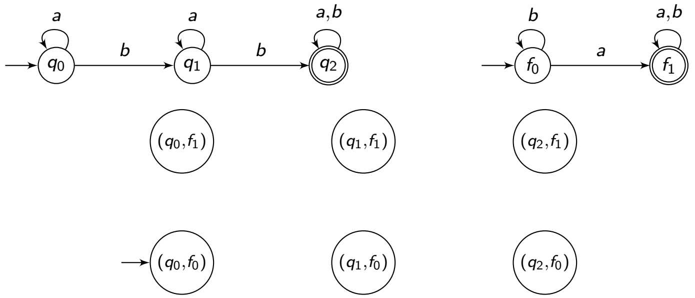


$L_1 \cap L_2$

$\mathcal{A}_1 = (Q_1, \Sigma, T_1, I_1, F_1)$ and $\mathcal{A}_2 = (Q_2, \Sigma, T_2, I_2, F_2)$
On construit $\mathcal{A}_3 = (Q_3, \Sigma, T_3, I_3, F_3)$

- $Q_3 = Q_1 \times Q_2$, $I_3 = I_1 \times I_2$ et $F_3 = F_1 \times F_2$
- $((q_1, q_2), a, (q_1', q_2')) \in T_3$ si et seulement si $(q_1, a, q_1') \in T_1$ et $(q_2, a, q_2') \in T_2$

$\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ doivent être sans ε-transitions.

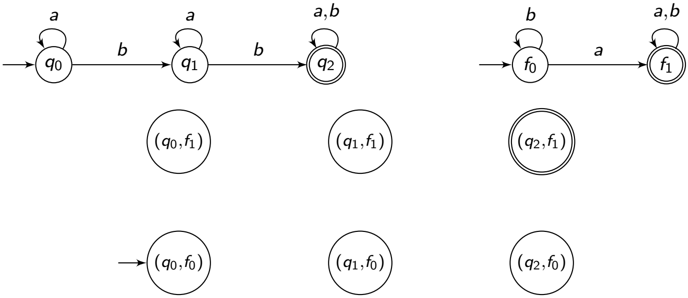


$L_1 \cap L_2$

$\mathcal{A}_1 = (Q_1, \Sigma, T_1, I_1, F_1)$ and $\mathcal{A}_2 = (Q_2, \Sigma, T_2, I_2, F_2)$
On construit $\mathcal{A}_3 = (Q_3, \Sigma, T_3, I_3, F_3)$

- $Q_3 = Q_1 \times Q_2$, $I_3 = I_1 \times I_2$ et $F_3 = F_1 \times F_2$
- $((q_1, q_2), a, (q_1', q_2')) \in T_3$ si et seulement si $(q_1, a, q_1') \in T_1$ et $(q_2, a, q_2') \in T_2$

$\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ doivent être sans ε-transitions.

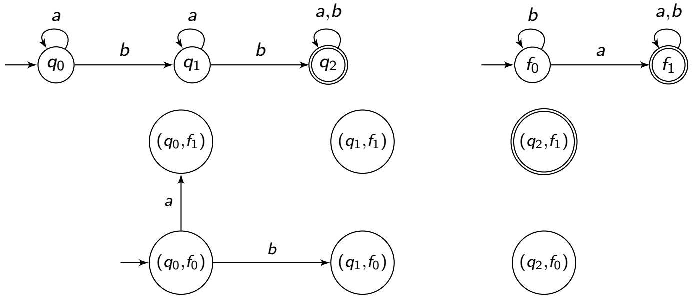


$L_1 \cap L_2$

$\mathcal{A}_1 = (Q_1, \Sigma, T_1, I_1, F_1)$ and $\mathcal{A}_2 = (Q_2, \Sigma, T_2, I_2, F_2)$
On construit $\mathcal{A}_3 = (Q_3, \Sigma, T_3, I_3, F_3)$

- $Q_3 = Q_1 \times Q_2$, $I_3 = I_1 \times I_2$ et $F_3 = F_1 \times F_2$
- $((q_1, q_2), a, (q_1', q_2')) \in T_3$ si et seulement si $(q_1, a, q_1') \in T_1$ et $(q_2, a, q_2') \in T_2$

$\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ doivent être sans ε-transitions.

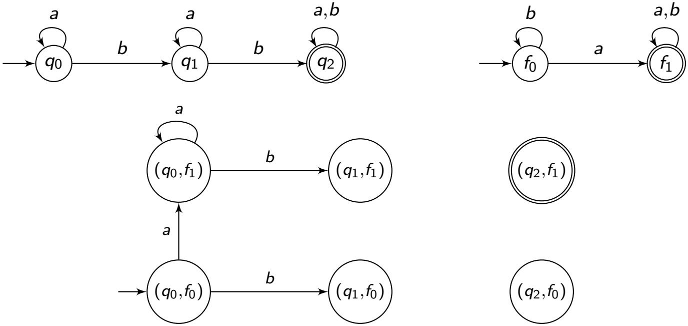


$L_1 \cap L_2$

$\mathcal{A}_1 = (Q_1, \Sigma, T_1, I_1, F_1)$ and $\mathcal{A}_2 = (Q_2, \Sigma, T_2, I_2, F_2)$
On construit $\mathcal{A}_3 = (Q_3, \Sigma, T_3, I_3, F_3)$

- $Q_3 = Q_1 \times Q_2$, $I_3 = I_1 \times I_2$ et $F_3 = F_1 \times F_2$
- $((q_1, q_2), a, (q_1', q_2')) \in T_3$ si et seulement si $(q_1, a, q_1') \in T_1$ et $(q_2, a, q_2') \in T_2$

$\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ doivent être sans ε-transitions.

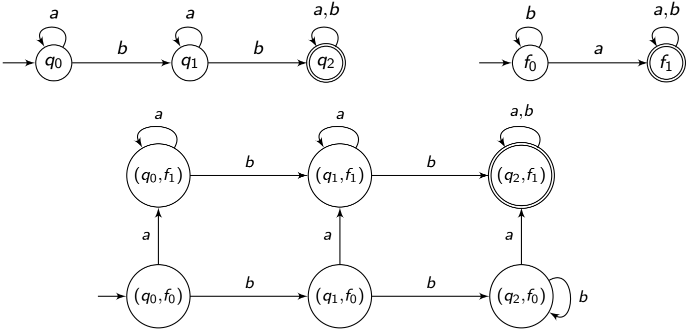


$L_1 \cap L_2$

$\mathcal{A}_1 = (Q_1, \Sigma, T_1, I_1, F_1)$ and $\mathcal{A}_2 = (Q_2, \Sigma, T_2, I_2, F_2)$
On construit $\mathcal{A}_3 = (Q_3, \Sigma, T_3, I_3, F_3)$

- $Q_3 = Q_1 \times Q_2$, $I_3 = I_1 \times I_2$ et $F_3 = F_1 \times F_2$
- $((q_1, q_2), a, (q_1', q_2')) \in T_3$ si et seulement si $(q_1, a, q_1') \in T_1$ et $(q_2, a, q_2') \in T_2$

$\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ doivent être sans ε-transitions.



Exercices

Construire les automates pour les langages suivants

- $L_1 = \{w \mid |w| \text{ est pair}\}$
- L_2 : les mots ne contenant pas le facteur *aab*
- $L_2 \cap L_1$

Ces automates sont-ils émondés ? Complets ? Sans ε-transition ?