Exercice 1 : langages vers expressions régulières Considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Pour chacun des langages suivants sur Σ, donner une expression régulière qui le dénote.

1. L'ensemble des mots qui commencent par a et finissent par b. $a(a+b)^*b$
2. L'ensemble des mots qui contiennent au moins trois occurrences du symbole a. $(a+b)^*a(a+b)^*a(a+b)^*a(a+b)^*$
3. L'ensemble des mots qui contiennent au moins trois occurrences consécutives du symbole a. $(a+b)^*aaa(a+b)^*$
4. L'ensemble des mots qui contiennent un nombre de a multiple de 3. $(b^*ab^*ab^*ab^*)^*$
5. L'ensemble des mots qui ne contiennent pas le facteur $a \cdot a$. $(b^*ab)^*b^*(a+\varepsilon)$
6. L'ensemble des mots qui commencent et finissent par le même symbole. $a(a+b)^*a + b(a+b)^*b$

Exercice 2 : Simplification d'expressions régulières Simplifier les expressions régulières suivantes.

1. $\varepsilon + ab + abab(ab)^*$ $(ab)^*$
2. $(b^*ab^*a)^*b^* + b^*a(b^*ab^*a)^*b^*$ $(a+b)^*$
3. $a(a^*b^*)^* + bb(a^*b^*)^* + ba(a+b^*)^*$ $a(a+b)^* + b(a+b)^+$
4. $a(a+b)^* + aa(a+b)^* + aaa(a+b)^*$ $a(a+b)^*$

Exercice 3 : Équivalence d'expressions régulières Donner une preuve ou un contre-exemple pour les équivalences suivantes.

1. $\varepsilon + aa^* = a^*$

   Vrai : $a^* = \sum_{i=0}^{\infty} a^i = \varepsilon + \sum_{i=1}^{\infty} a^i = \varepsilon + a\sum_{i=0}^{\infty} a^i = \varepsilon + aa^*$
2. $(a+b)^* = a^* + b^*$

   Faux : ab appartient à $(a+b)^*$ mais pas à $a^* + b^*$.
3. $(ab+a)^*a = a(ba+a)^*$

   Vrai : $(ab+a)^*a = (\sum_{i=0}^{\infty}(ab+a)^i)a = (\sum_{i=0}^{\infty}(ab+a)^i a) = (a + \sum_{i=1}^{\infty}(ab+a)^{i-1}(aba+a^2)) = (a + \sum_{i=1}^{\infty}(ab+a)^{i-1}a(ba+a)) = (a + \sum_{i=1}^{\infty} a(ba+a)^i) = a(ba+a)^*$.
4. $(ab+a)^*ab = (aa^*b)^*$

   Faux : ε appartient à $(aa^*b)^*$ mais pas à $(ab+a)^*ab$.

Exercice 4 : Langages réguliers ou non Prouver si les langages suivants sont réguliers ou non.

1. $\{a^ib^jc^{i+j} \mid i, j \in \mathbb{N}\}$

   Supposons que $L = \{a^ib^jc^{i+j} \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ soit régulier. Il satisfait donc le lemme de l'étoile. Soit N l'entier donné par le lemme de l'étoile pour L. On fixe $w = a^Nb^Nc^{2N}$. $w \in L$ et $|w| = 4N \geq N$, donc selon le lemme de l'étoile, il existe x, y, z tels que

— $w = xyz$

— $|y| > 0$

— $|xy| \leq N$

— $\forall k \geq 0, xy^k z \in L$

Comme $|xy| \leq N$ et w commence par N occurrence de a, $y = a^m$ avec $0 < m \leq N$. Le mot $xy^2z = a^{N+m}B^N c^{2N} \notin L$, ce qui contredit notre supposition, donc L n'est pas régulier.

2. $\{a^n a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ $(aa)^*$
3. $\{w \cdot w \cdot w \mid w \in \{a,b\}^*\}$ Utiliser le mot $a^N ba^N ba^N b$
4. $(aa)^* \cap \{a^n \mid n \text{ est un nombre premier}\}$

   Seul le mot aa appartient à cette intersection, un ensemble fini de mot est régulier.
5. $(aa)^* \cap \{a^n \mid n \text{ est un carré}\}$

   Supposons que $L = (aa)^* \cap \{a^n \mid n \text{ est un carré}\}$ soit régulier. Il satisfait donc le lemme de l'étoile. Soit N l'entier donné par le lemme de l'étoile pour L. Soit M un entier pair tel que $M > N$. On a donc que $w = a^{M^2} \in L$. Comme $|w| \geq N$, par le lemme de l'étoile, il existe x, y, z tels que

   — $w = xyz$

   — $|y| > 0$

   — $|xy| \leq N$

   — $\forall k \geq 0, xy^k z \in L$

   Comme w ne contient que des a, $y = a^m$ pour $0 < m \leq N$. On a $w' = xy^2z = a^{M^2+m}$. Par notre supposition, $w' \in L$, donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $k^2 = M^2 + m$. Comme $m > 0$, $k > M$. Par ailleurs, $(M+1)^2 = M^2 + 2M + 1 > M^2 + N \geq M^2 + m = k^2$. Donc k est un entier strictement entre M et $M+1$, ce qui est impossible. Donc $w' \notin L$, L ne satisfait pas le lemme de l'étoile, il n'est donc pas régulier.

Exercice 5 : Correct ou incorrect ? Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est correcte ou non. Si elle est correcte, donner une preuve. Si elle est incorrecte, donner un contre-exemple.

1. Si A et B sont réguliers, alors A ∪ B est régulier.
2. Si A ∪ B et A ne sont pas réguliers alors B n'est pas régulier.
3. Si A ∪ B n'est pas régulier et A est régulier alors B n'est pas régulier.
4. Si A est régulier et B est non-régulier, alors A ∪ B est non-régulier.
5. Si A et B ne sont pas réguliers, alors A ∪ B n'est pas régulier.

Exercice 6 : Lemme d'Arden Soit $E, F \subseteq \Sigma^*$ des langages.

1. Montrer que E^*F est solution de l'équation $X = EX + F$.
2. Montrer que, si $\varepsilon \notin E$, alors E^*F est l'unique solution de cette équation.

Voir Wikipedia.

Exercice 7 : Dérivation de grammaires Considérez la grammaire $(\{a,b,c\},\{S\},R,S)$ où les règles R sont

$S \rightarrow abS$

$S \rightarrow bcS$

$S \rightarrow bbS$

$S \rightarrow a$

$S \rightarrow cb$

Construisez l'arbre de dérivation des mots *bcbba*, *bbbcbba* et *bcabbbbbcb*.

De quel type est cette grammaire. Existe t'il une grammaire de type supérieur générant le même langage ?

Exercice 8 : Grammaire et langages Donner la grammaire correspondante si l'entrée est un langage, et le langage si l'entrée est une grammaire. On fixe l'axiome S.

1. $S \rightarrow AB \mid aAb$

   $B \rightarrow bBa \mid \varepsilon$

   $A \rightarrow \varepsilon$

   $\{ab\} + \{b^n a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

2. $S \rightarrow aSa \mid bSb \mid U$

   $U \rightarrow cU \mid \varepsilon$

   $\{wc^n \mathsf{mirroir}(w) \mid n \in \mathbb{N}\}$

3. $\{ab^n a \mid n \in \mathbb{N}\}$

   $S \rightarrow aB$

   $B \rightarrow bB \mid a$

4. $\{a^{2n} b^n \mid n \in \mathbb{N}$

   $S \rightarrow aaSb \mid \varepsilon$

5. $S \rightarrow AB$

   $A \rightarrow ab$

   $B \rightarrow BB$

   Aucune dérivation de cette grammaire ne termine. Son langage est donc vide.