**Exercice 1 : langages vers expressions régulières** Considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Pour chacun des langages suivants sur $\Sigma$, donner une expression régulière qui le dénote.

1. L'ensemble des mots qui commencent par $a$ et finissent par $b$. $a(a+b)^*b$
2. L'ensemble des mots qui contiennent au moins trois occurrences du symbole $a$. $(a+b)^*a(a+b)^*a(a+b)^*a(a+b)^*$
3. L'ensemble des mots qui contiennent au moins trois occurrences consécutives du symbole $a$. $(a+b)^*aaa(a+b)^*$
4. L'ensemble des mots qui contiennent un nombre de $a$ multiple de 3. $(b^*ab^*ab^*ab^*)^*$
5. L'ensemble des mots qui ne contiennent pas le facteur $a \cdot a$. $(b^*ab)^*b^*(a+\varepsilon)$
6. L'ensemble des mots qui commencent et finissent par le même symbole. $a(a+b)^*a + b(a+b)^*b$

**Exercice 2 : Simplification d'expressions régulières** Simplifier les expressions régulières suivantes.

1. $\varepsilon + ab + abab(ab)^*$ $(ab)^*$
2. $(b^*ab^*ab^*)^*b^* + b^*a(b^*ab^*ab^*)^*b^*$ $(a+b)^*$
3. $a(a^*b^*)^* + bb(a^*b^*)^* + ba(a+b^*)^*$ $a(a+b)^* + b(a+b)^+$
4. $a(a+b)^* + aa(a+b)^* + aaa(a+b)^*$ $a(a+b)^*$

**Exercice 3 : Équivalence d'expressions régulières** Donner une preuve ou un contre-exemple pour les équivalences suivantes.

1. $\varepsilon + aa^* = a^*$

   Vrai : $a^* = \sum_{i=0}^{\infty} a^i = \varepsilon + \sum_{i=1}^{\infty} a^i = \varepsilon + a\sum_{i=0}^{\infty} a^i = \varepsilon + aa^*$
2. $(a+b)^* = a^* + b^*$

   Faux : $ab$ appartient à $(a+b)^*$ mais pas à $a^* + b^*$.
3. $(ab+a)^*a = a(ba+a)^*$

   Vrai : $(ab+a)^*a = (\sum_{i=0}^{\infty}(ab+a)^i)a = (\sum_{i=0}^{\infty}(ab+a)^i a) = (a + \sum_{i=1}^{\infty}(ab+a)^{i-1}(aba+a^2)) = (a + \sum_{i=1}^{\infty}(ab+a)^{i-1}a(ba+a)) = (a + \sum_{i=1}^{\infty} a(ba+a)^i) = a(ba+a)^*$.
4. $(ab+a)^*ab = (aa^*b)^*$

   Faux : $\varepsilon$ appartient à $(aa^*b)^*$ mais pas à $(ab+a)^*ab$.

**Exercice 4 : Langages réguliers ou non** Prouver si les langages suivants sont réguliers ou non.

1. $\{a^i b^j c^{i+j} \mid i, j \in \mathbb{N}\}$

   Supposons que $L = \{a^i b^j c^{i+j} \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ soit régulier. Il satisfait donc le lemme de l'étoile. Soit $N$ l'entier donné par le lemme de l'étoile pour $L$. On fixe $w = a^N b^N c^{2N}$. $w \in L$ et $|w| = 4N \geq N$, donc selon le lemme de l'étoile, il existe $x, y, z$ tels que

— $w = xyz$

— $|y| > 0$

— $|xy| \leq N$

— $\forall k \geq 0, xy^k z \in L$

Comme $|xy| \leq N$ et $w$ commence par $N$ occurrence de $a$, $y = a^m$ avec $0 < m \leq N$. Le mot $xy^2z = a^{N+m}b^N c^{2N} \notin L$, ce qui contredit notre supposition, donc $L$ n'est pas régulier.

2. $\{a^n a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ $(aa)^*$

3. $\{w \cdot w \cdot w \mid w \in \{a, b\}^*\}$ Utiliser le mot $a^N ba^N ba^N b$

4. $(aa)^* \cap \{a^n \mid n \text{ est un nombre premier}\}$

   Seul le mot $aa$ appartient à cette intersection, un ensemble fini de mot est régulier.

5. $(aa)^* \cap \{a^n \mid n \text{ est un carré}\}$

   Supposons que $L = (aa)^* \cap \{a^n \mid n \text{ est un carré}\}$ soit régulier. Il satisfait donc le lemme de l'étoile. Soit $N$ l'entier donné par le lemme de l'étoile pour $L$. Soit $M$ un entier pair tel que $M > N$. On a donc que $w = a^{M^2} \in L$. Comme $|w| \geq N$, par le lemme de l'étoile, il existe $x, y, z$ tels que

   — $w = xyz$

   — $|y| > 0$

   — $|xy| \leq N$

   — $\forall k \geq 0, xy^k z \in L$

   Comme $w$ ne contient que des $a$, $y = a^m$ pour $0 < m \leq N$. On a $w' = xy^2z = a^{M^2+m}$. Par notre supposition, $w' \in L$, donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $k^2 = M^2 + m$. Comme $m > 0$, $k > M$. Par ailleurs, $(M + 1)^2 = M^2 + 2M + 1 > M^2 + N \geq M^2 + m = k^2$. Donc $k$ est un entier strictement entre $M$ et $M + 1$, ce qui est impossible. Donc $w' \notin L$, $L$ ne satisfait pas le lemme de l'étoile, il n'est donc pas régulier.

**Exercice 5 : Correct ou incorrect ?** Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est correcte ou non. Si elle est correcte, donner une preuve. Si elle est incorrecte, donner un contre-exemple.

1. Si A et B sont réguliers, alors A ∪ B est régulier.

   Vrai. Comme A et B sont réguliers, il existe des expressions régulières $r_A$ et $r_B$ les représentant. Par définition, $r_A + r_B$ reconnait le langage A∪B qui est donc régulier.

2. Si A ∪ B et A ne sont pas réguliers alors B n'est pas régulier.

   Faux. Supposons A= $\{a^n \mid n \text{ est premier}\}$ et B= $\{a\}$. Alors A ∪ B = A qui n'est pas régulier comme vu en cours, alors que B est régulier (d'expression $r_A$ = a).

3. Si A ∪ B n'est pas régulier et A est régulier alors B n'est pas régulier. Vrai. Il s'agit simplement de la contraposée de la première proposition.

4. Si A est régulier et B est non-régulier, alors A ∪ B est non-régulier.

   Faux. Supposons A= $\{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ (régulier d'expression $r_A = a^*$) et B= $\{a^n \mid n \text{ est premier}\}$. Alors A ∪ B = B (qui est régulier) car le langage de A est inclue dans le langage de B.

5. Si A et B ne sont pas réguliers, alors A $\cup$ B n'est pas régulier. Faux. Supposons A= $\{a^n \mid n \text{ est premier}\}$ et B= $\{a^n \mid n \text{ n'est pas premier}\}$. Ces deux langages sont irréguliers, mais leur union est le langage $\{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ d'expression régulière $a^*$.