

**Exercice 1 : langages vers expressions régulières** Considérons l'alphabet  $\Sigma = \{a, b\}$ . Pour chacun des langages suivants sur  $\Sigma$ , donner une expression régulière qui le dénote.

1. L'ensemble des mots qui commencent par  $a$  et finissent par  $b$ .
2. L'ensemble des mots qui contiennent au moins trois occurrences du symbole  $a$ .
3. L'ensemble des mots qui contiennent au moins trois occurrences consécutives du symbole  $a$ .
4. L'ensemble des mots qui contiennent un nombre de  $a$  multiple de 3.
5. L'ensemble des mots qui ne contiennent pas le facteur  $a \cdot a$ .
6. L'ensemble des mots qui commencent et finissent par le même symbole.

**Exercice 2 : Simplification d'expressions régulières** Simplifier les expressions régulières suivantes.

1.  $\varepsilon + ab + abab(ab)^*$
2.  $b^*(ab^*a)^*b^* + b^*ab^*(ab^*a)^*b^*$
3.  $a(a^*b^*)^* + bb(a^*b^*)^* + ba(a + b^*)^*$
4.  $a(a + b)^* + aa(a + b)^* + aaa(a + b)^*$

**Exercice 3 : Équivalence d'expressions régulières** Donner une preuve ou un contre-exemple pour les équivalences suivantes.

1.  $\varepsilon + aa^* = a^*$
2.  $(a + b)^* = a^* + b^*$
3.  $(ab + a)^*a = a(ba + a)^*$
4.  $(ab + a)^*ab = (aa^*b)^*$

**Exercice 4 : Langages réguliers ou non** Prouver si les langages suivants sont réguliers ou non.

1.  $\{a^i b^j c^{i+j} \mid i, j \in \mathbb{N}\}$
2.  $\{a^n a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
3.  $\{w \cdot w \cdot w \mid w \in \{a, b\}^*\}$
4.  $(aa)^* \cap \{a^n \mid n \text{ est un nombre premier}\}$
5.  $(aa)^* \cap \{a^n \mid n \text{ est un carré}\}$

**Exercice 5 : Correct ou incorrect ?** Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est correcte ou non. Si elle est correcte, donner une preuve. Si elle est incorrecte, donner un contre-exemple.

1. Si  $A$  et  $B$  sont réguliers, alors  $A \cup B$  est régulier.
2. Si  $A \cup B$  et  $A$  ne sont pas réguliers alors  $B$  n'est pas régulier.

3. Si  $A \cup B$  n'est pas régulier et  $A$  est régulier alors  $B$  n'est pas régulier.
4. Si  $A$  est régulier et  $B$  est non-régulier, alors  $A \cup B$  est non-régulier.
5. Si  $A$  et  $B$  ne sont pas réguliers, alors  $A \cup B$  n'est pas régulier.

**Exercice 6 : Lemme d'Arden** Soit  $E, F \subseteq \Sigma^*$  des langages.

1. Montrer que  $E^*F$  est solution de l'équation  $X = EX + F$ .
2. Montrer que, si  $\varepsilon \notin E$ , alors  $E^*F$  est l'unique solution de cette équation.

**Exercice 7 : Dérivation de grammaires** Considérez la grammaire  $(\{a, b, c\}, \{S\}, R, S)$  où les règles  $R$  sont

$$S \rightarrow abS$$

$$S \rightarrow bcS$$

$$S \rightarrow bbS$$

$$S \rightarrow a$$

$$S \rightarrow cb$$

Construisez l'arbre de dérivation des mots  $cbba$ ,  $bbcbba$  et  $bcabbbbcb$ .

De quel type est cette grammaire. Existe-t'il une grammaire de type supérieur générant le même langage ?

**Exercice 8 : Grammaire et langages** Donner la grammaire correspondante si l'entrée est un langage, et le langage si l'entrée est une grammaire. On fixe l'axiome  $S$ .

$$1. S \rightarrow AB \mid aAb$$

$$B \rightarrow bBa \mid \varepsilon$$

$$A \rightarrow \varepsilon$$

$$2. S \rightarrow aSa \mid bSb \mid U$$

$$U \rightarrow cU \mid \varepsilon$$

$$3. \{ab^n a \mid n \in \mathbb{N}\}$$

$$4. \{a^{2^n} b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

$$5. S \rightarrow AB$$

$$A \rightarrow ab$$

$$B \rightarrow BB$$